物　　理　（3問題　100点）

物理問題　I

次の文を読んで，$\boxed{}$には適した式または数値を，$\{\quad\}$からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{}}$はすでに$\boxed{}$または$\{\quad\}$で与えられたものと同じものを表す。また，**問1**，**問2**では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

以下の設問では，向心力を受けて円運動する物体について摩擦力による速さの変化を考える。その際，さまざまな物理量の微小な変化を調べる。

(1) **図1**のように，なめらかな台の上に置かれた質量 m の物体が，ひもにつながれている。ひもは台の中心Oに開けられたなめらかな小さな穴を貫通し，ばねにつながれている。さらにばねの下端は下側の台に固定されている。この物体は半径 r，速さ v の等速円運動をしている。ばね定数は b であり，ばねとひもの質量は無視してよいものとする。また，物体が点Oにあるとき，ばねの長さが自然の長さであるようになっている。

この等速円運動に対する運動方程式は $\dfrac{mv^2}{r}=\boxed{\text{ア}}$ となる。物体の運動エネルギーは $K=\dfrac{1}{2}mv^2$，ばねの弾性力の位置エネルギーは $V=\dfrac{1}{2}br^2$ で与えられる。このとき運動方程式から運動エネルギー K と位置エネルギー V の間に

{イ：① $K=V$　② $K=-V$　③ $2K=V$　④ $2K=-V$　⑤ $K=2V$　⑥ $K=-2V$}

という関係が成り立つことが分かる。

(2) 次に，この物体に速度と逆方向に摩擦力が作用した場合を考える。摩擦力の大きさ D は一定とする。ばねの力に比べて非常に小さい摩擦力が作用したため，**図2**のように軌道がわずかに円運動から変化したとしよう。そのため，物体の速度は(1)

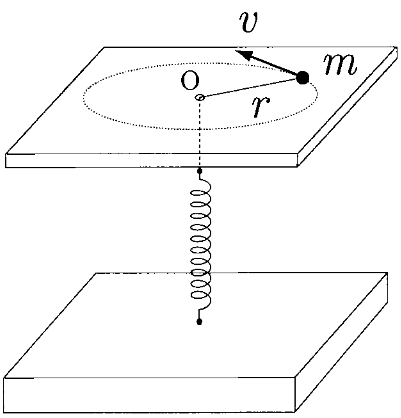

図 1

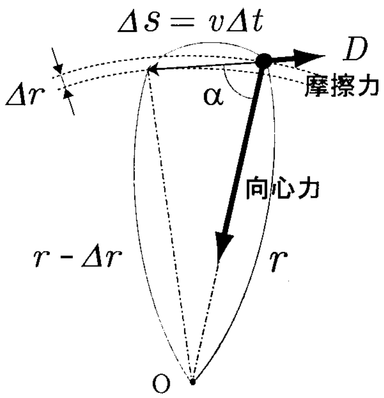

図 2

で考えた速度と厳密には異なっている。ただし，摩擦力が非常に小さい場合には，速度の差はわずかであるので無視してよいものとする。物体の速さを v とすると，**図 2** のように微小な時間 Δt の間の移動距離は $\Delta s = v\Delta t$ で与えられる。この移動の結果，物体と点 O との距離は r から $r - \Delta r$ に変化する。実際には r に比べてその変化 Δr は非常に小さいが，この図では微小な変化 Δr を強調している。また，物体の運動方向とばねによる向心力の間の角度 α は 90° よりわずかに小さい。

この微小な時間 Δt の間に生じる運動エネルギーの微小な変化 ΔK は，ばねの力による仕事と摩擦力による仕事で決まるので，$\Delta K = (\boxed{\text{ウ}}) \times \Delta s$ と与えられる。Δs と Δr が微小であることより，$\Delta s \cos\alpha = \Delta r$ が成り立つとする。運動エネルギーの微小な変化 ΔK のうち，ばねによる仕事は，半径の微小な変化 Δr に比例する形で $\boxed{\text{エ}}$ と表される。このばねによる仕事と位置エネルギーの微小な変化の関係を調べよう。軌道の半径が r から $r - \Delta r$ に微小に変化する間に，位置エネルギーは

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta\left(\frac{1}{2} br^2\right)\\ &= \frac{1}{2} b(r - \Delta r)^2 - \frac{1}{2} br^2\\ &= - br\Delta r + \frac{1}{2} b(\Delta r)^2\\ &\fallingdotseq - br\Delta r\end{aligned}$$

だけ微小に変化する。上式の最後の行では，微小な変化 Δr の 2 次の項 $\frac{1}{2} b(\Delta r)^2$

を無視している。このように，本問題では微小な変化の2次の項は無視してよい。したがって運動エネルギーの微小な変化のうち，ばねによる仕事の部分は $\left\{\text{オ}：①\ +1，②\ -1，③\ +\frac{1}{2}，④\ -\frac{1}{2}\right\}\times \varDelta V$ となる。また摩擦力による仕事は，微小な時間 $\varDelta t$ に比例する形で $\boxed{\text{カ}}$ と表すことができる。したがって，$\varDelta t$ の間に生じる力学的エネルギー $E = K + V$ の微小な変化 $\varDelta E = \varDelta K + \varDelta V$ は

$$\varDelta E = \boxed{\boxed{\text{カ}}} \qquad \text{(i)}$$

と与えられる。

摩擦力が非常に小さいので，物体は近似的に円運動を保ちながら，少しずつ速さと半径が変化していくとする。このとき関係式 $\boxed{\boxed{\text{イ}}}$ は成り立っていると考えてよい。したがって，微小な変化 $\varDelta K$，$\varDelta V$ についても，同じ関係を保ちながら，力学的エネルギーが $\varDelta E = \boxed{\boxed{\text{カ}}}$ と微小に変化していくので，運動エネルギーの微小な変化は

$$\varDelta K = \boxed{\text{キ}} \times \left(\boxed{\boxed{\text{カ}}}\right) \qquad \text{(ii)}$$

となる。（注：$\boxed{\text{キ}}$ には適切な数値を入れなさい。）

(3) 上の(2)では微小な時間 $\varDelta t$ の間の運動エネルギーの微小な変化を求めた。この間に，物体の速さは v から $v + \varDelta v$ に変化するので，運動エネルギーの微小な変化は $\varDelta K = \varDelta\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \fallingdotseq mv\varDelta v$ とも表せる。この式と式(ii)より，物体の速さ v の変化率は

$$\frac{\varDelta v}{\varDelta t} = \boxed{\text{ク}} \qquad \text{(iii)}$$

と与えられる。式(iii)は直線上の等加速度運動と同じ形をしている。時刻 $t = 0$ での物体の速さを v_0 とすると，時刻 t での物体の速さは $v(t) = \boxed{\text{ケ}}$ となる。

(4) これまでは，物体がばねの力と小さい摩擦力を受けて近似的に円運動する場合を考えてきた。今度は，**図3**のように，質量 M の地球の周りを運動する質量 m の人工衛星について，これまでと同じような計算を行う。地球の中心から人工衛星までの距離を r とする。人工衛星には地球からの万有引力と，大気から受ける小さい空気抵抗力が作用している。ただし，人工衛星の質量 m は地球の質量 M に比べて非

常に小さいため地球は動かないとしてよい。さらに，地球と人工衛星の大きさは無視してよいものとする。

まず，空気の抵抗力がはたらいていないとする。人工衛星は速さ v，半径 r の等速円運動をしている。万有引力定数を G とすると運動方程式は $\dfrac{mv^2}{r}=\dfrac{GMm}{r^2}$ となる。また，万有引力による位置エネルギーは $V=-\dfrac{GMm}{r}$ であることが知られている。このとき運動方程式から，運動エネルギー K と位置エネルギー V の間の関係式

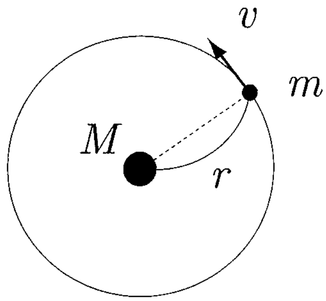

図 3

コ：① $K=V$　② $K=-V$　③ $2K=V$
④ $2K=-V$　⑤ $K=2V$　⑥ $K=-2V$

が得られる。

次に，(2)，(3)における摩擦力と同様に人工衛星に空気の抵抗力が作用した場合を考える。ここで空気の抵抗力は，速度と逆方向にはたらく，大きさ D の一定の力として取り扱う。ただし，空気の抵抗力は非常に小さく，人工衛星は近似的に円運動しているとみなしてよいものとする。

問 1　人工衛星の場合にも，(2)と同様に，運動エネルギーの微小な変化 ΔK は万有引力と空気の抵抗力による仕事で与えられる。このことから，人工衛星の力学的エネルギーの微小な変化 ΔE に対して式(i)が成り立つことを，計算過程も含めて示しなさい。ただし，半径が r から $r-\Delta r$ に変化するとき，位置エネルギー $V=-\dfrac{GMm}{r}$ の微小な変化は

$$\Delta V=\Delta\left(-\frac{GMm}{r}\right)=-GMm\left(\frac{1}{r-\Delta r}-\frac{1}{r}\right)\fallingdotseq-\frac{GMm}{r^2}\Delta r$$

という近似式で与えられる。

問 2　上の**問** 1 の結果と，微小な変化 ΔK，ΔV に対しても関係式 $\boxed{\text{コ}}$ と同じ関係が成り立つことを用いて，式(iii)に対応する人工衛星の速さ v の変化率を表す方程式を計算過程も含めて導きなさい。また抵抗力により，人工衛星が加速されるか，減速されるか，変化しないか，いずれであるかを，その理由とともに答えなさい。

物理問題　II

次の文を読んで，$\boxed{}$ には適した式または数値を，［　　　］には適切なグラフを，$\{\}$ からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{}}$ はすでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じ式を表す。また，**問1**，**問2**では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図1のように，幅 w，長さ ℓ の長方形の2枚の極板A，Bが間隔 d で向かい合わせに配置された平行板コンデンサーを考える。不導体(絶縁体)で作られた水平でなめらかな台の上に極板A，Bは固定されており，その間にあらかじめ帯電していない幅 w の直方体の金属板が極板A，Bと接触しないように挿入されている。これらはすべて不導体の気体中にあり，その気体の誘電率を ε とする。極板は**図1**のように起電力 V の電池と接続されている。

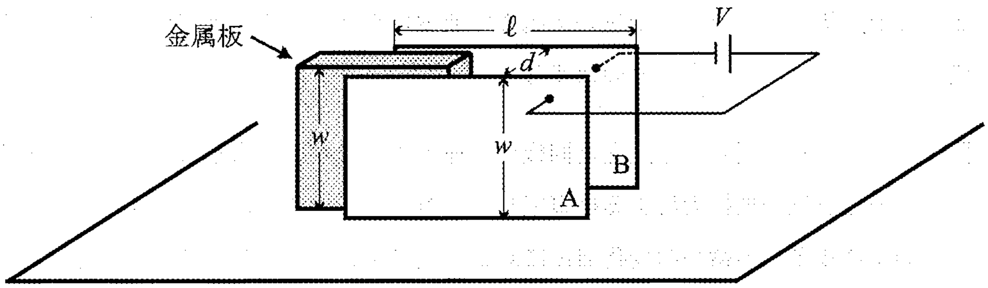

図1

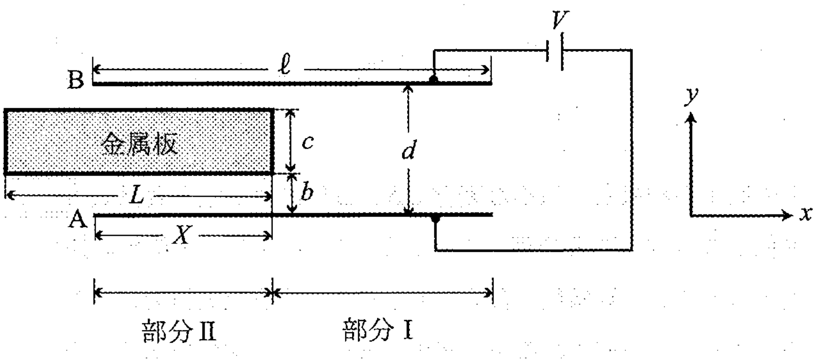

図2

図 2 は図 1 を台の上方から見たものである。金属板は厚さ c，長さ L であり，極板に平行に極板 A から距離 b 離れ，コンデンサーの左端から長さ X だけ挿入されている。ここで図 2 の右側に示すように x 軸，y 軸を定義し，図 2 の右向きを x の正方向，上向きを y の正方向とする。以下では，極板と金属板の端における電場(電界)の乱れは無視でき，電場は全て y の正方向のみを向いているとする。

このコンデンサーは，図 2 に「部分 I」として示した極板間に金属板が存在しない部分と，「部分 II」として示した極板間に金属板が存在する部分の 2 つの並列コンデンサーとみなすことができる。このコンデンサーに蓄えられたエネルギーは $\boxed{\text{イ}}$ である。

このコンデンサーの部分 I について y の正方向の電位の変化をグラフに表すと，図 3 のようになる。図 3 では，極板 A からの距離を横軸 y にとり，極板 B の電位を 0 とした。この図を参考に，部分 II について y の正方向の電位の変化をグラフに表すと $\boxed{\text{ロ}}$ のようになる。(グラフには $y = b$ での電位を式で記入せよ。)

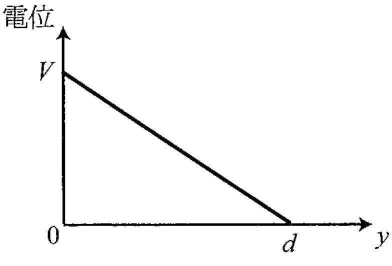

図 3

このコンデンサーの部分 I に蓄えられたエネルギーを部分 I の極板間の電場の強さ E を用いて表すと，$\boxed{\text{ハ}} \times wd(\ell - X)$ となる。$wd(\ell - X)$ は部分 I の極板間の空間の体積であるから，その空間には単位体積あたり $\boxed{\text{ハ}}$ のエネルギーが蓄えられていると考えることができる。このように考えた場合，部分 II の極板間の金属板内に蓄えられる単位体積あたりのエネルギーは $\boxed{\text{ニ}}$ となる。

ところで，図 2 の金属板には静電気力がはたらくことがわかっている。このことをつぎのように調べてみよう。ここで，電池の内部抵抗，電池とコンデンサーの間の配

線の電気抵抗，金属板内部の電気抵抗，金属板と台の間の摩擦は，いずれも無視できるものとする。

まず，金属板にはたらく静電気力の x 軸に平行な成分について考えよう。静電気力の x 軸に平行な成分につりあう外力を金属板に加え，極板Aからの距離 b を保ったまま，極板間に存在する金属板の長さを X から $X + \Delta X$ まで微小変化させたとしよう。このときのコンデンサーに蓄えられたエネルギーの変化量は $\boxed{\text{ホ}}$ である。また，この間に電池がした仕事は $\boxed{\text{ホ}}$ × $\boxed{\text{ヘ}}$ である。コンデンサーに蓄えられたエネルギーの変化量から電池のした仕事を引いたものが，外力が金属板にした仕事に等しい。このことから，金属板にはたらく静電気力の x 軸に平行な成分の大きさを求めると $\boxed{\text{ホ}}$ ÷ $\boxed{\text{ト}}$ となる。また，その方向は{**チ**：① x の正方向　② x の負方向}である。

問 1　金属板にはたらく静電気力の y 軸に平行な成分の大きさはいくらか。その理由とともに記述せよ。

$V = 10\,\mathrm{kV}$，$\varepsilon = 8.9 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$，$w = 20\,\mathrm{mm}$，$\ell = 40\,\mathrm{mm}$，$d = 5.0\,\mathrm{mm}$ のとき，$c = 3.0\,\mathrm{mm}$，$L = 20\,\mathrm{mm}$ の金属板を $b = 1.0\,\mathrm{mm}$ として極板間に $X = 15\,\mathrm{mm}$ 挿入した。このときに金属板にはたらく静電気力の x 軸に平行な成分の大きさを有効数字2けたで求めると，$\boxed{\text{リ}}$ N となる。

問 2　**図 2** の金属板の代わりに，外形はまったく同じでその内部が空洞になっている金属箱を極板間に挿入することにする。また，その空洞内には誘電率 ε の不導体の気体が入っているとする。この金属箱にはたらく静電気力の x 軸および y 軸に平行な成分は，**図 2** の金属板を用いたときに比べ，それぞれどう変化するか。その理由とともに記述せよ。

物理問題　Ⅲ

次の文を読んで，$\boxed{}$には適した式または数値を，$\{\}$には図3から適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。また，**問1**，**問2**では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

電磁波の一種であるγ線の放射と測定について考察しよう。物質を構成する原子は電子と原子核からなり，原子核の内部のエネルギーが高い状態から低い状態に移るときに，原子核からγ線が放射される。以下では，電子の質量は原子核の質量と比較して非常に小さいため，無視できるものとする。

振動数fの電磁波は，ある一定のエネルギーをもった粒子の集まりと考えることができ，その粒子を光子という。光子1個のエネルギーはhf，運動量は電磁波の進む向きに$\dfrac{hf}{c}$の大きさであることがわかっている。ここで，hはプランク定数とよばれる定数であり，cは光速である。

以下において，原子核の内部のエネルギー状態には，励起状態とよばれるエネルギーの高い状態と基底状態とよばれるエネルギーの最も低い状態の2つがあるものとする。励起状態のエネルギーをE_e，基底状態のエネルギーをE_gとし，そのエネルギー差を$\Delta E = E_e - E_g$とする。

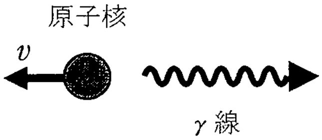

図1

まず，質量Mの原子核1個によるγ線放射を考える。原子核が励起状態から基底状態に移るときに，γ線の光子が1個放射される。静止していた原子核は，**図1**のようにγ線放射の反作用により速さvで動き出す。速さvの原子核の運動エネルギーと運動量の大きさは，原子核が基底状態にあるか励起状態にあるかに関わりなく，それぞれ$\dfrac{1}{2}Mv^2$，Mvとしてよい。また，原子核の全エネルギーは内部のエネルギー（E_eまたはE_g）と原子核の運動エネルギーの和で与えられる。よって原子核から

振動数f_1のγ線が放射される場合，エネルギー保存則はΔEを用いて $\boxed{\text{あ}}$，運動量保存則は $\boxed{\text{い}}$ と書くことができる。ここで，ΔEはMc^2に比べ充分に小さいことがわかっている。絶対値が1より充分小さい数δに対して成り立つ近似式$\sqrt{1+\delta} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2$を用いると，$f_1$は$\Delta E$，$M$，$c$，$h$を用いて $\boxed{\text{う}}$ となる。

次に，この原子核をもつ原子N個で構成されている静止した結晶からのγ線光子1個の放射を考える。この結晶の質量はNMで与えられる。以下では，結晶は充分低温であるものとし，原子核が結晶中に固定され，γ線を放射する原子核はその反作用を受けても結晶中に固定されたままであるとする。この場合，γ線放射の反作用は結晶全体で受け止められ，結晶が速さv_Nで動き出すものとする。このときの放射γ線の振動数f_NはΔE，M，N，c，hを用いて $\boxed{\text{え}}$ となる。また，構成する原子数が無限大とみなせる大きい結晶の場合，放射されるγ線の振動数は$f_\infty = \frac{\Delta E}{h}$となる。

問 1 原子N個で構成されている静止した結晶からのγ線光子1個の放射について，エネルギー保存則と運動量保存則を記述せよ。さらにNが無限大とみなせるとき，エネルギー保存則において結晶の運動エネルギーの項がその他の項に比べ無視でき，その結果，放射γ線の振動数がf_∞となることを説明せよ。

同様の考察により，同じ種類の原子で構成されている静止した大きい結晶にγ線を当てると，この結晶は振動数f_∞のγ線のみをよく吸収することがわかっている。このような結晶をここでは吸収体とよぶ。

次に，**図2**のような実験装置を用いたγ線の測定を考えよう。

γ線源は同じ種類のN個の原子で構成された結晶多数からなり，振動数f_Nのγ線を一定の強度(単位時間当たりに放射されるγ線の光子数)で放射するものとする。吸収体を乗せた台車を水平な床の上におき，**図2**のように左端を床に固定したばねにつなぐ。γ線源は台車から充分に遠方に置かれ，γ線は吸収体付近で**図2**のx軸に平行に進むものとする。吸収体の表面はx軸に垂直である。吸収体は，振動数f_∞以外の

振動数のγ線を透過させるが，振動数f_∞のγ線を完全に吸収するものとする。吸収体の後方の床上にγ線強度測定器を設置する。吸収体からのγ線放射は無視できるものとする。

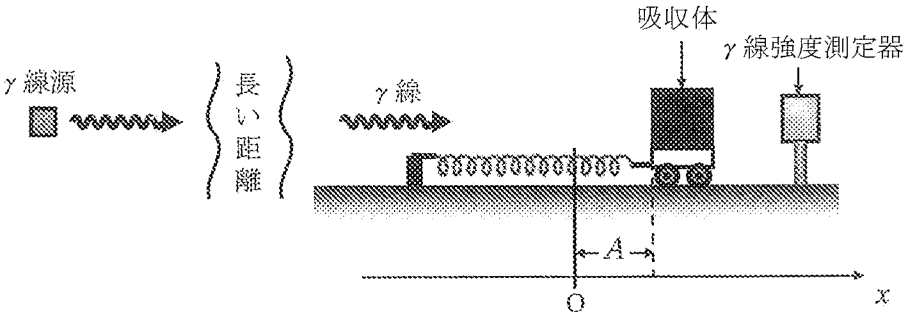

図2

ばねを自然の長さのときの位置OからAだけ伸ばして，時刻$t=0$に静かに放すと，台車はx軸に平行に角振動数ωで単振動をする。以下では，吸収体の運動により，吸収体中で観測されるγ線の振動数f_dは音波のドップラー効果と同じ変化をするものとする。なお，吸収体の屈折率によるγ線の速度の変化は無視できるものとする。この場合，γ線の波長をλとすると，吸収体が速さVで運動しているときは，静止しているときに比べ，単位時間当たりに吸収体に到達する波の数が$\dfrac{V}{\lambda}$だけ変化する。よって，時刻tにおいて$\dfrac{f_d}{f_N}=\dfrac{\boxed{\text{お}}}{c}$の関係がある。（$\boxed{\text{お}}$は$\lambda$，$V$を用いずに表せ。）

台車が動き始めてから時刻t_1で突然，測定器で測定されるγ線強度が変化した。f_dがf_∞に一致したからである。絶対値が1より充分小さい数δに対して成り立つ近似式$\dfrac{1}{1-\delta}\fallingdotseq 1+\delta$を用いると，$\omega t_1$の満たす条件は$\sin\omega t_1=\boxed{\text{か}}$である。（$\boxed{\text{か}}$は$f_\infty$，$f_N$，$f_d$を用いずに表せ。）

ここで，$Mc^2=1\times10^{-8}$J，$\Delta E=2\times10^{-14}$Jの原子核のγ線放射において，$N=10^4$，$A=0.1$mのときに$\omega t_1=\dfrac{\pi}{6}$radで測定される$\gamma$線強度が変化したとする。なお，$c=3\times10^8$m/sとする。このときの$\omega$を有効数字1けたで求めると$\boxed{\text{き}}$rad/sである。また，台車が一周期単振動するとき，測定されるγ線強度とωtの関係は図3の$\left\{\ \text{く}\ \right\}$のように予想される。

問 2　**図 3** で{　く　}を選択した理由を記述せよ。

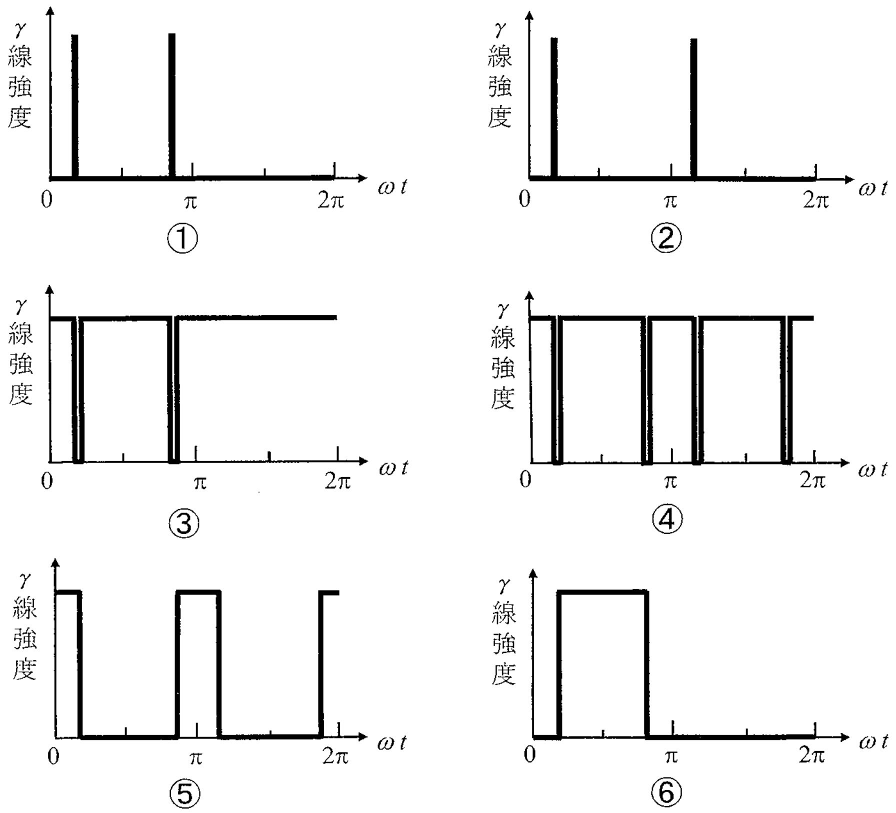

図 3

物理問題は，このページで終わりである。